Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany

3. Übungsblatt zur Lineare Algebra I

Abbildungen, Relationen und ihre Eigenschaften

Notation: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Aufgabe 1. ((Alleine) 3P+1P)

(a) Es sei $A := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Auf A sei eine Relation „$\sim$“ definiert durch:

$$(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1.$$

  (i) Zeigen Sie, dass „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf A definiert.
  (ii) Geben Sie die Äquivalenzklasse $[(3, 5)]_\sim \in \mathcal{P}(A)$ von $(3, 5) \in A$ an.
  (iii) Es bezeichne $A/\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen von „$\sim$“ auf A. Geben Sie eine Bijektion $\varphi\colon A/\sim \to \mathbb{Z}$ an.

(b) Wir definieren die Relation „$|$“ auf $\mathbb{N}$ durch:

$$a|b \iff \exists k \in \mathbb{N}: \ b = k \cdot a.$$

Zeigen Sie, dass „$|$“ eine partielle Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ definiert.

Aufgabe 2. ((Alleine) 4P)

Es sei A eine nicht-leere Menge und $\mathfrak{R} \subseteq A \times A$ eine reflexive Relation. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{R} \subseteq A \times A$ genau dann eine Äquivalenzrelation ist, wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt:

$$x\mathfrak{R}z \text{ und } y\mathfrak{R}z \implies x\mathfrak{R}y.$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 27. 11. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 1P+2P+1P)

Es sei M eine Menge mit endlich vielen Elementen und $f\colon M \to M$ eine Abbildung. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.

(b) Es existieren natürliche Zahlen $k, l \in \mathbb{N}$, sodass $f^k(x) = f^{k+l}(x)$ für alle $x \in M$ gilt.
(Hinweis: Gut im Tutorium aufpassen ;D)

(c) Ist f bijektiv, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f^k = \mathrm{id}_M$. Dabei bezeichnet $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ die identische Abbildung.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 2P+2P)

(a) Es sei A eine nicht-leere Menge. Für eine Indexmenge I seien partielle Ordnungsrelationen $R_i \subset A \times A$ $(i \in I)$ definiert. Entscheiden und begründen Sie, ob

$$\bigcap_{i\in I} R_i \subseteq A \times A \quad \text{beziehungsweise} \quad \bigcup_{i\in I} R_i \subseteq A \times A$$

wieder Ordnungsrelationen sind.

(b) Wir bezeichnen mit $\mathfrak{R}_{\leq} := R_2 \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ die partielle Ordnungsrelation aus der Vorlesung (Beispiel 6.2, Beispiel 6.4) definiert durch

$$(n, m) \in \mathfrak{R}_{\leq} \iff n \leq m.$$

Es sei weiter eine Relation $\mathfrak{R} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ definiert durch

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $(0, k) \in \mathfrak{R}$.

(ii) Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt: Aus $(n, m) \in \mathfrak{R}$ folgt $(n + 1, m + 1) \in \mathfrak{R}$.

Wir definieren außerdem die Indexmenge $I \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$ durch

$$\mathfrak{O} \in I \iff \mathfrak{O} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \text{ ist Ordnungsrelation mit } \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{O}$$

und setzen $\mathfrak{K} = \bigcap_{\mathfrak{O}\in I} \mathfrak{O}$. Zeigen Sie die Identität $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}_{\leq}$.

(Anmerkung: $\mathfrak{K}$ ist die kleinste Ordnungsrelation, die $\mathfrak{R}$ enthält, vgl. Teil(a)).

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 27. 11. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.